フーリエ変換の性質

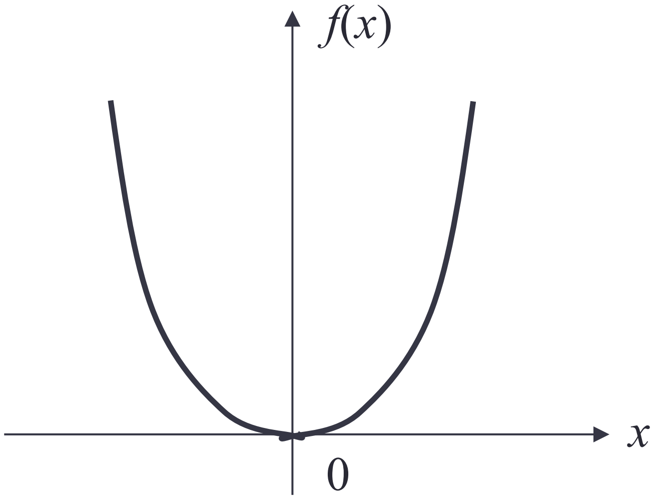
- 対称性
- パーシバルの定理
- 畳み込み積分
- 畳み込み積分定理

フーリエ変換の応用

- デルタ関数のフーリエ変換
- 方形パルスのフーリエ変換
- デルタ関数列のフーリエ変換

偶関数

y軸に対称な関数

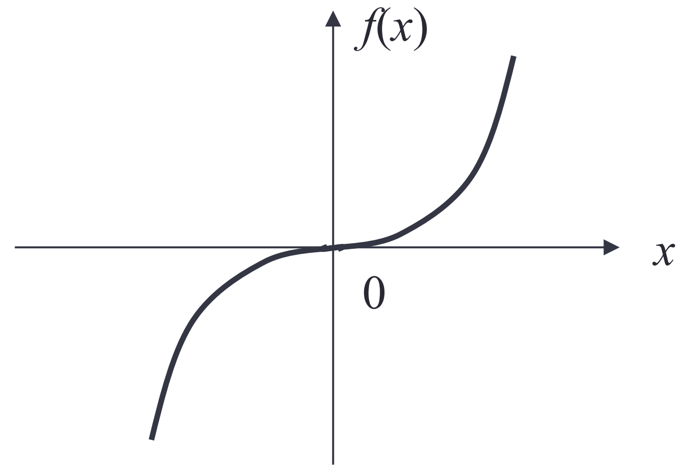


$$f(x) = f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

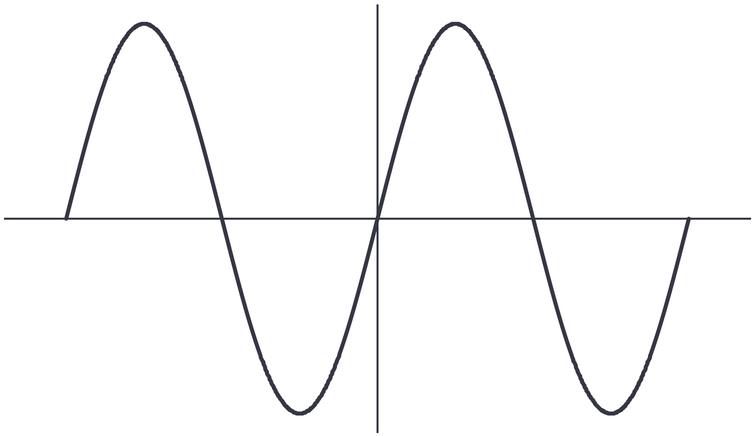
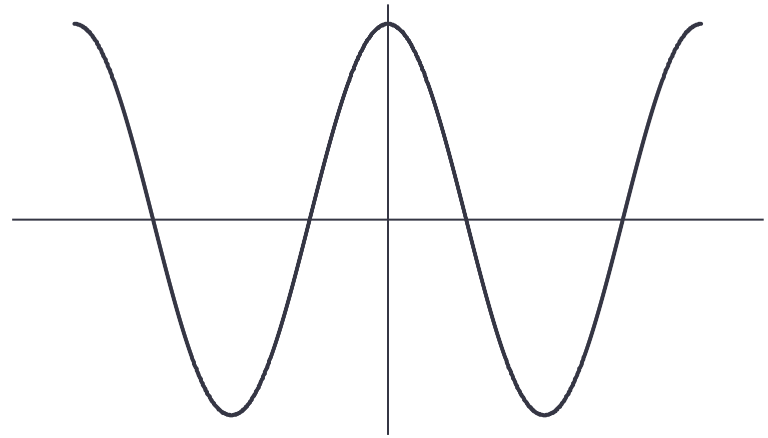
奇関数

原点に対称な関数



$$f(x) = -f(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

正弦波 $\sin(\omega t)$：______　　余弦波 $\cos(\omega t)$：______

偶関数×偶関数＝__________

奇関数×奇関数＝__________

偶関数×奇関数＝__________

$f(x)$が偶関数のときのフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$=$$

$f(x)$が奇関数のときのフーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$=$$

フーリエ変換の対称性

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

実領域 $\longrightarrow$ 周波数領域

実領域 $\longleftarrow$ 周波数領域

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$x \longrightarrow -x$

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

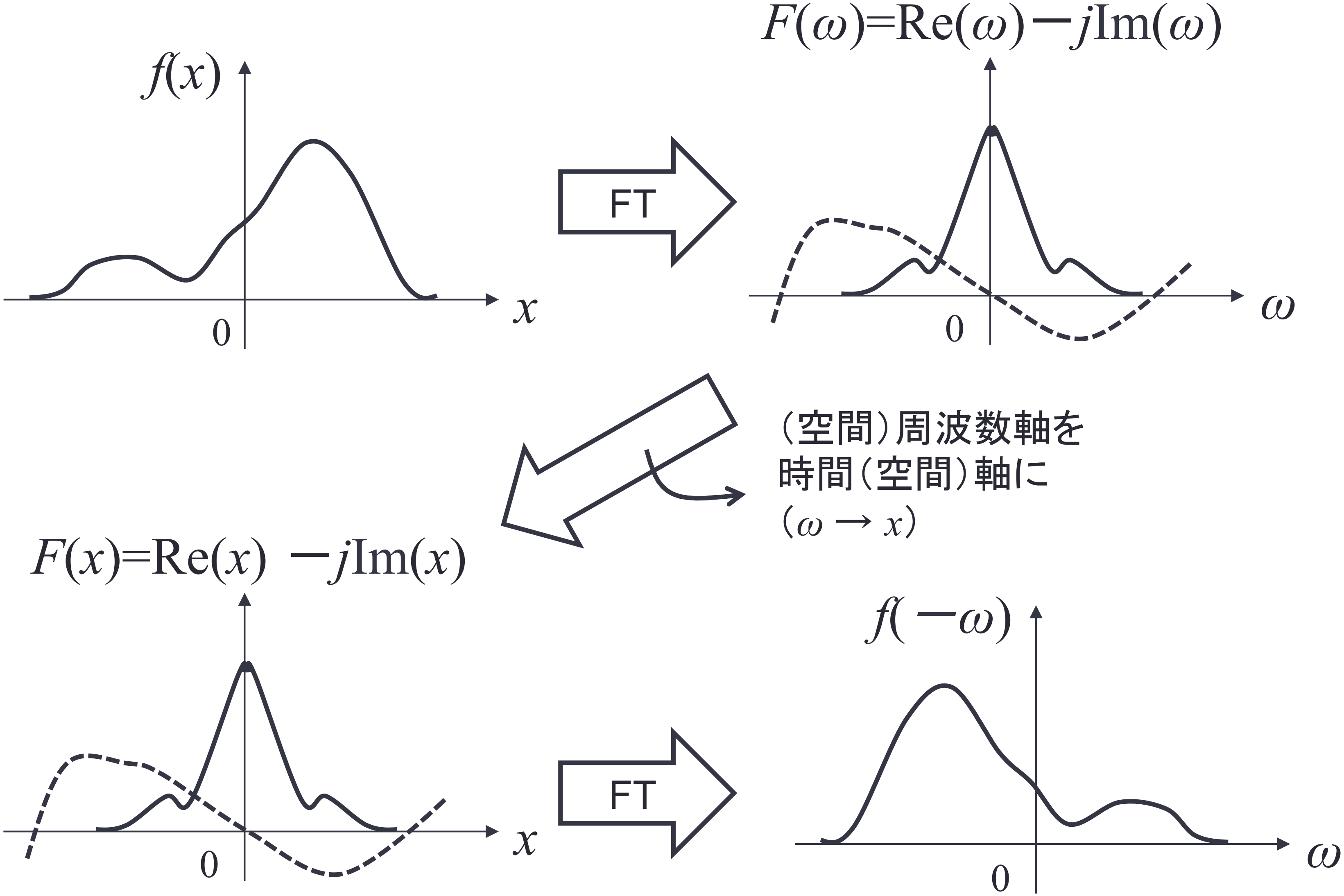
x と ωを入れ替える

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx}$$

$$F(\omega) = \Im\left[f(x)\right]$$

ならば

$$\Im\left[F(x)\right] = f(-\omega)$$


$f(x)$
x
0
FT
$F(\omega)$=Re(ω)ーjIm(ω)
ω
0
（空間）周波数軸を
時間（空間）軸に
（$\omega \rightarrow x$）
$F(x)$=Re(x) ーjIm(x)
x
0
FT
$f($ー$\omega)$
ω
0

フーリエ変換の対称性

ある関数をフーリエ変換して出来た関数と逆変換して出来た関数は，変数の符号が異なるだけ

「時間（空間）変数 x と（空間）周波数変数 ω を，それぞれ _____ と ____ に交換できる」というのがフーリエ変換の対称性という言葉の意味

フーリエ変換の対称性といった場合，左右対称とか点対称などといった幾何学的な意味はまったくない

パーシバルの定理

トータルの＿＿＿＿＿＿＿＿＿は，実領域で求めても周波数領域で求めても同じである

$F(\omega)$の共役複素数

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\left|F(\omega)\right|^2}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F^*(\omega)\,d\omega$$

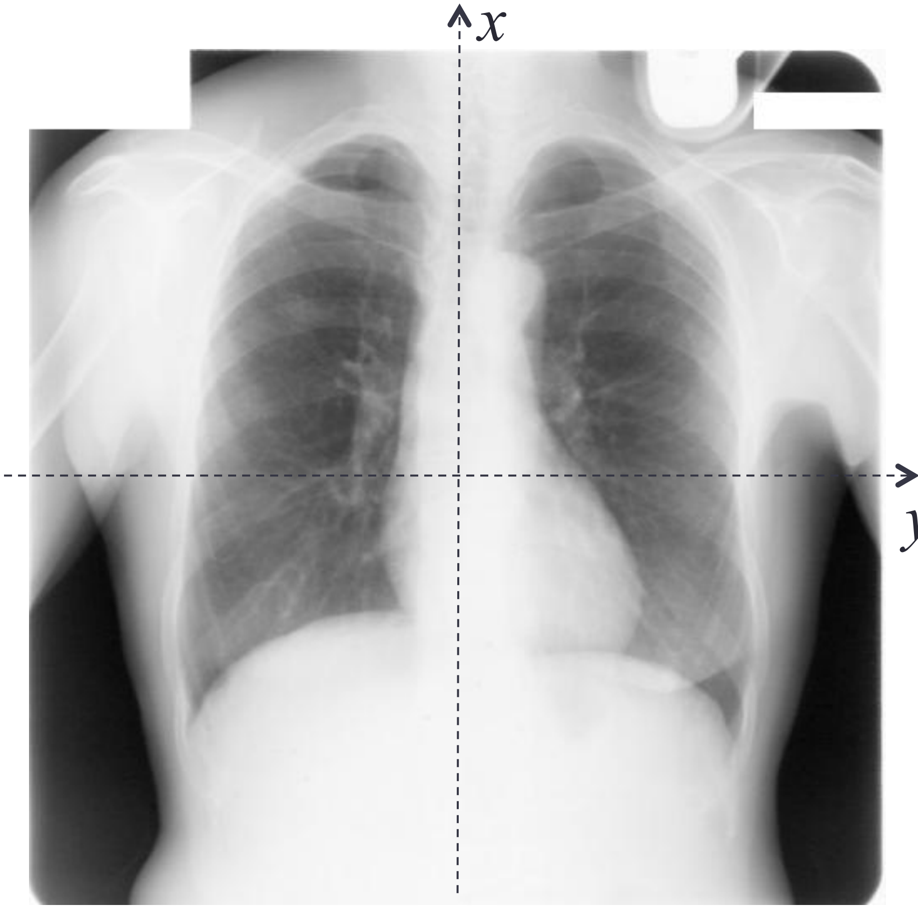
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}\,dx\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right]f(x)\,dx$$

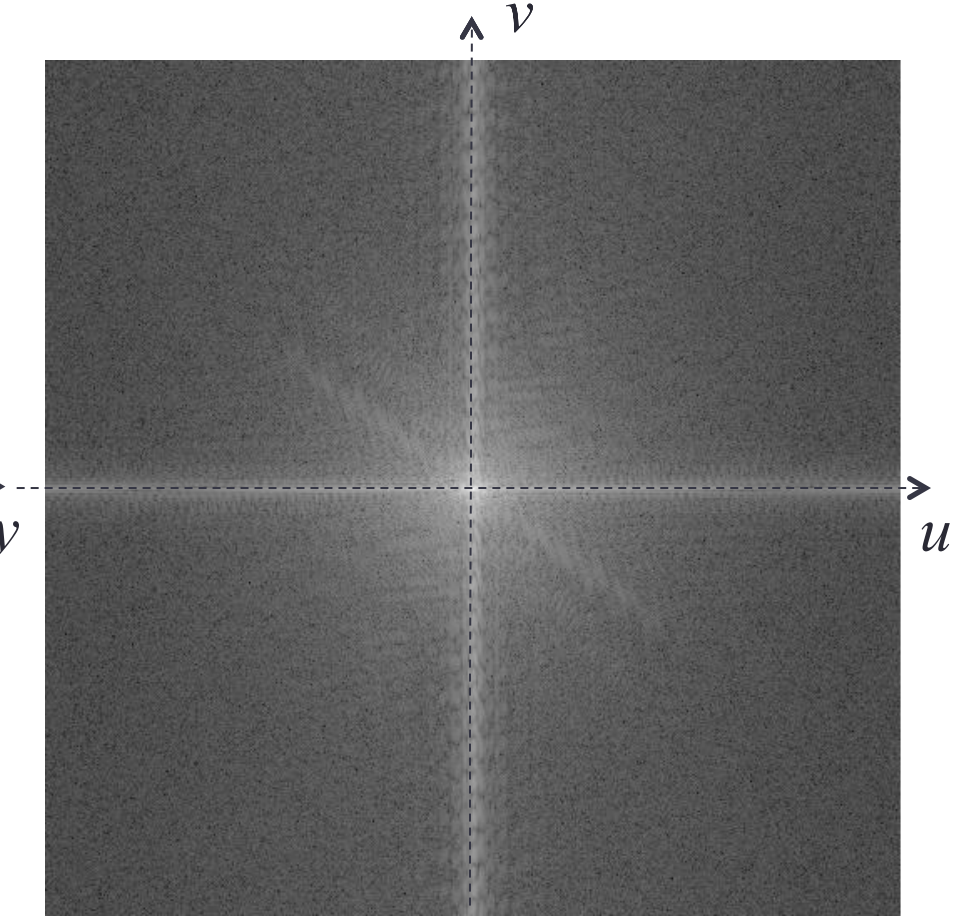
$$= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2\,dx$$

$a+ib$,
$a-ib$
の関係

パワースペクトル
Power spectrum



空間領域　$f(x,y)$



空間周波数領域　$F(u,v)$

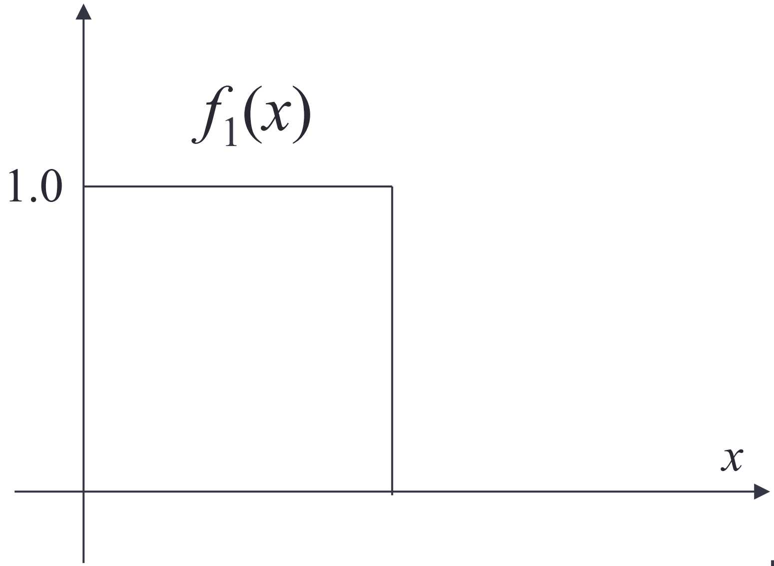
- 空間軸上のパワー（平方の総和）と空間周波数軸上のパワー（平方の総和）は等しい
- 空間軸上のエネルギーと周波数軸上のエネルギーは保存される

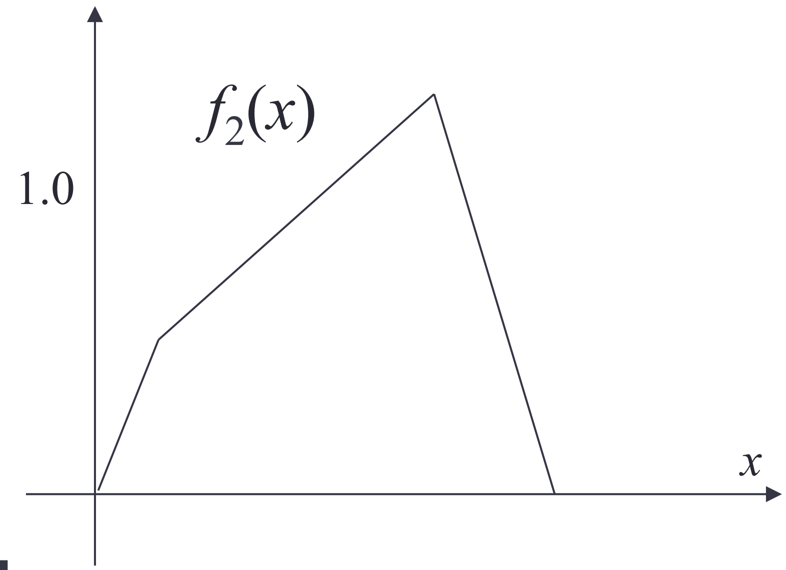
畳み込み積分（合成積，重畳積分）
Convolution（コンボリューション）

２つの関数$f_1(x)$, $f_2(x)$が与えられたとき

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x-y)dy$$

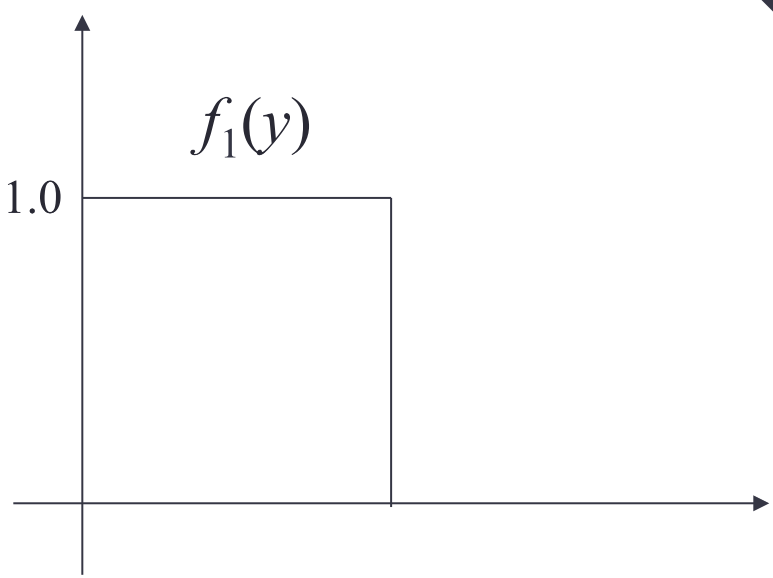
を，$f_1(x)$と$f_2(x)$の＿＿＿＿＿＿＿＿という

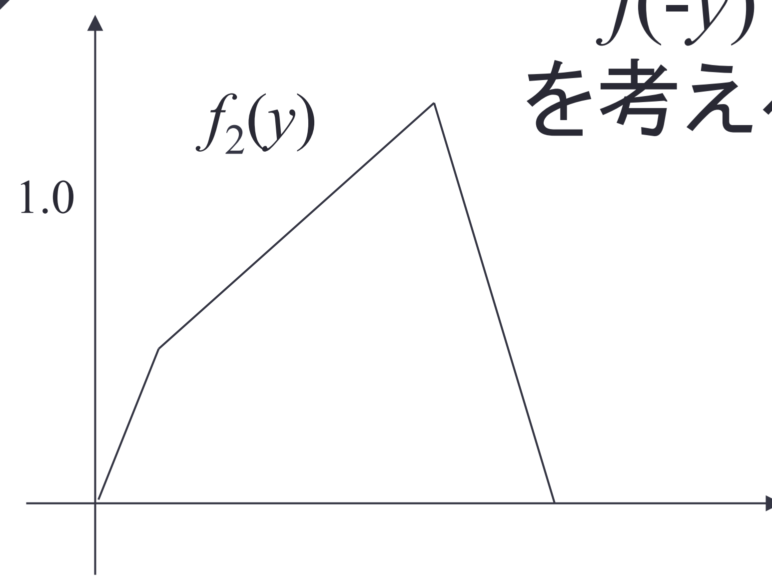


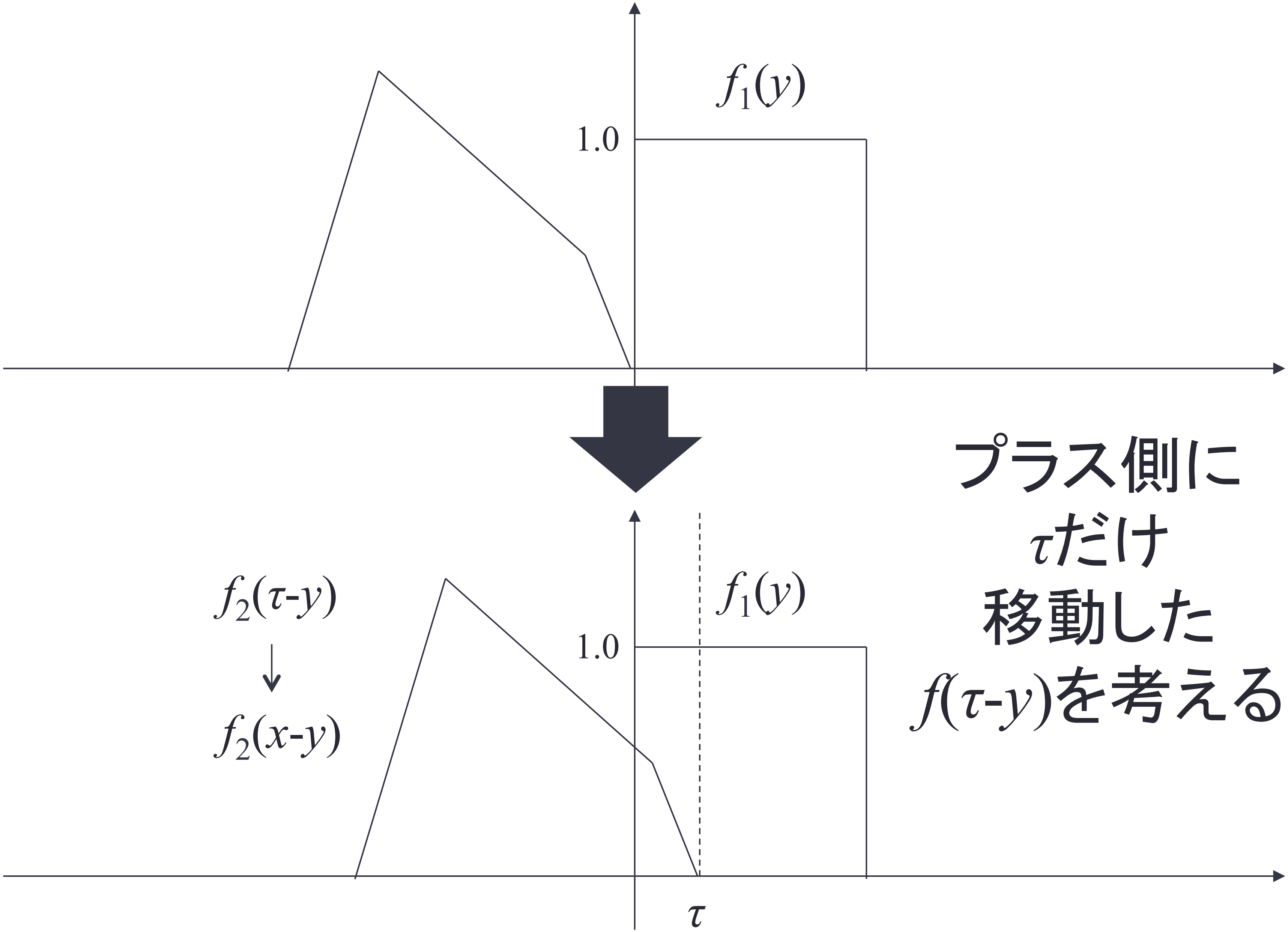


$x \rightarrow y$

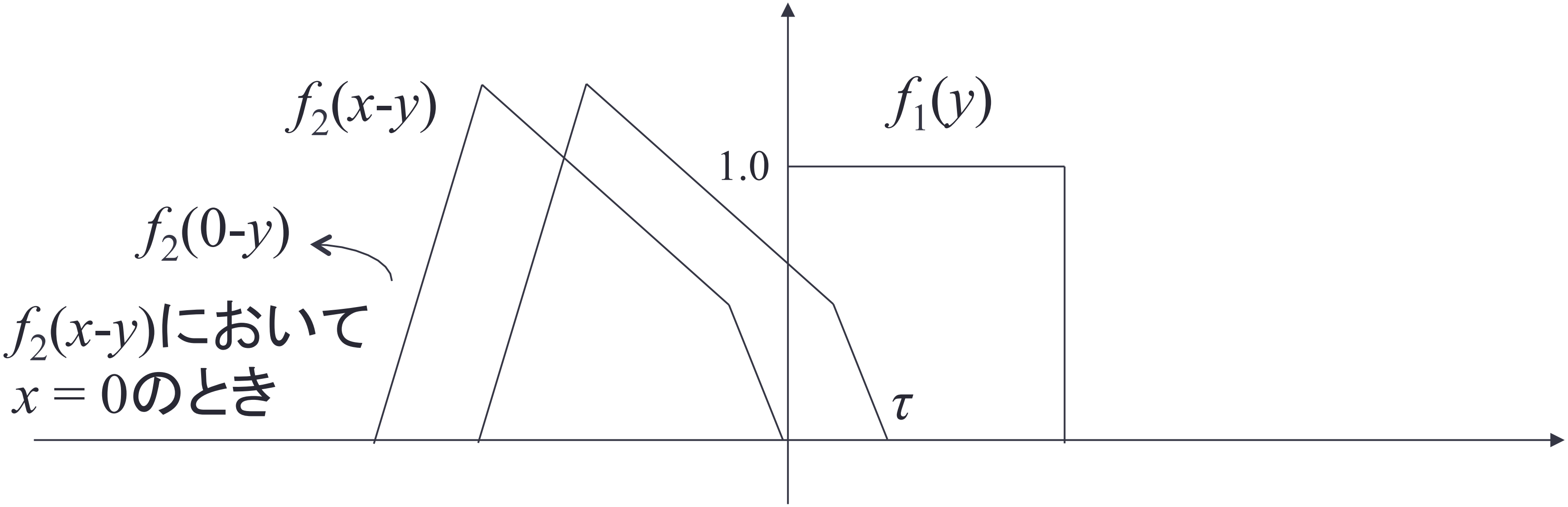
$f(-y)$
を考える







プラス側に
τだけ
移動した
$f(\tau\text{-}y)$を考える



$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)\,dy$$

$x = \tau$のとき

$x = 0$のとき

$$f(x) = \int_0^{\tau} f_1(y) f_2(x-y)\,dy$$

$f(x) =$ ________

= ____________

畳み込み積分の定義式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)\,dy$$
$$= f_1(x) * f_2(x)$$

$*$:コンボリューションを意味する記号

$f_1(x)$と$f_2(x)$の畳み込み積分は

$f_1(x) * f_2(x)$ で表される

次のような問題を考えてみます

２つの関数$f(x)$, $g(x)$が与えられたとき
コンボリューション（convolution）積分は
$f(x)*g(x)$ で表される

$f(x)*g(x)$ のフーリエ変換を求めよ.

ここで，仮に$f(x)$, $g(x)$のフーリエ変換を

$$\Im[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \leftarrow F(\omega)$$

$$\Im[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j\omega x} dx \leftarrow G(\omega)$$

で表す

$$\Im\left[f(x)*g(x)\right]=\Im\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot g(x-y)dy\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot g(x-y)dy\right]\cdot e^{-j\omega x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(y)\cdot g(x-y)dy\right]\cdot e^{-j\omega y}\cdot e^{j\omega y}\cdot e^{-j\omega x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-j\omega y}dy\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\cdot e^{-j\omega(x-y)}dx$$

$$=$$

$$(-j\omega x)+(j\omega x)=0 \longrightarrow e^{0}=1=e^{-j\omega x+j\omega x}=e^{-j\omega x}\cdot e^{j\omega x}$$

畳み込み積分定理

Convolution（コンボリューション）定理

$$\Im\left[f(x) * g(x)\right] = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

実空間領域
（時間）

空間周波数領域
（時間）

実領域
（空間，時間）

$$f(x) * g(x) = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy}$$

FT *FT* *FT*

$$\Im\left[f(x) * g(x)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy \cdot e^{-j\omega x} dx$$

周波数領域
（空間，時間）

$$\boldsymbol{F(\omega)} \quad \boldsymbol{G(\omega)}$$

畳み込み積分定理
Convolution（コンボリューション）定理

２つの関数$f(x)$, $g(x)$の畳み込み積分のフーリエ変換は，それぞれの関数のフーリエ変換$F(\omega)$, $G(\omega)$の積で表される

⬇

実領域での畳み込み積分は，
周波数領域では________で行える

フーリエ変換の応用

デルタ関数　$\delta(x)$

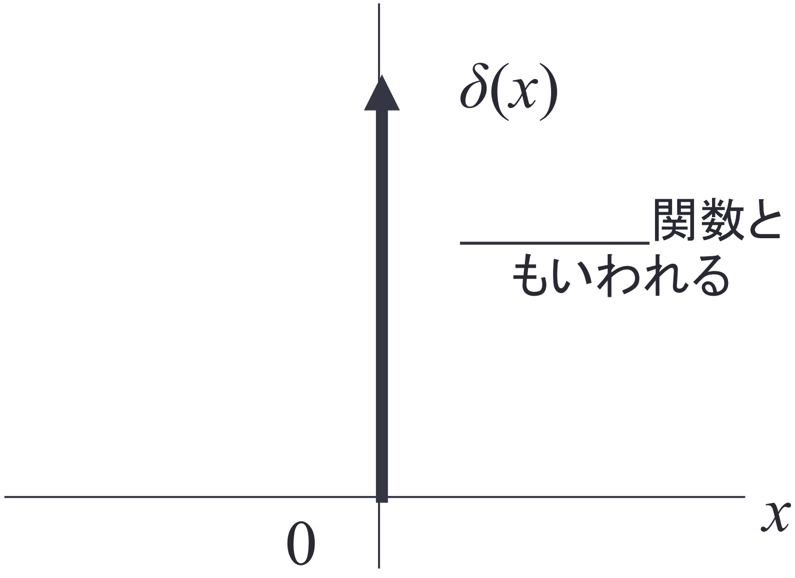
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

$$\delta(x) = 0 \qquad (x \neq 0)$$

$$\delta(0) = \infty$$

ある関数$f(x)$とデルタ関数を
掛け合わせて積分すると

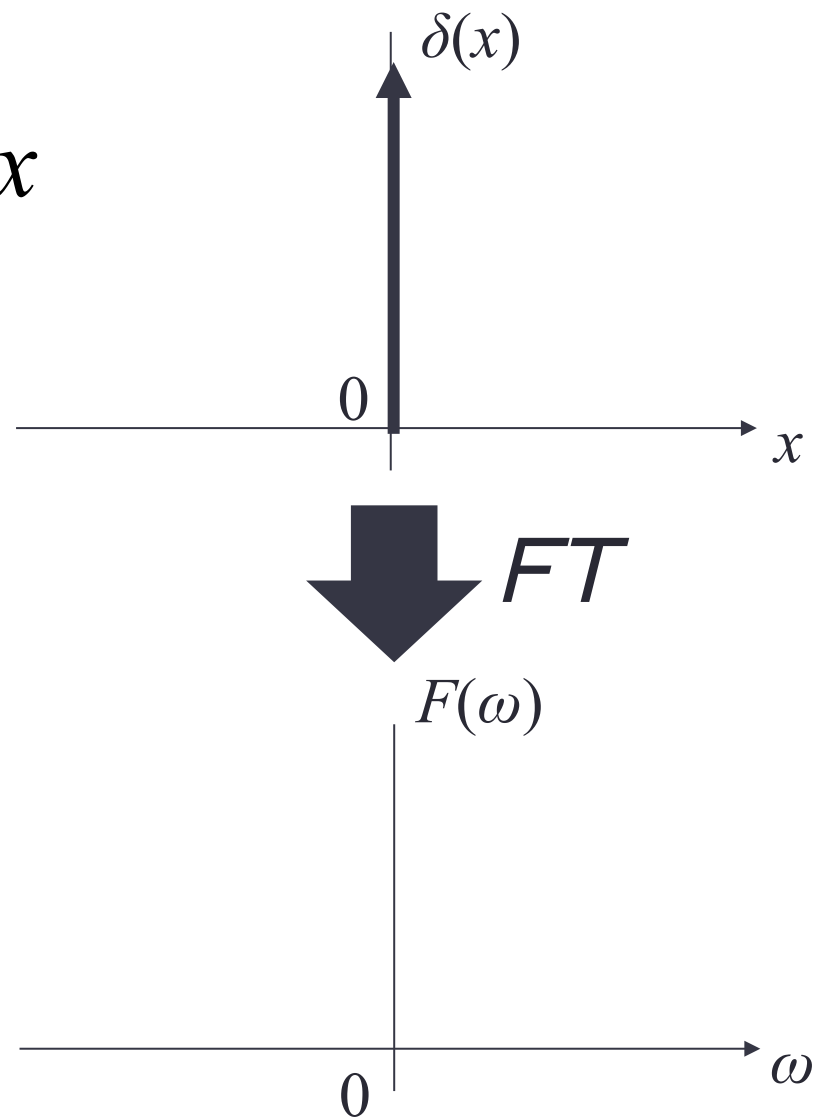
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x)dx = \underline{\qquad\quad}$$



＿＿＿＿＿＿関数と
もいわれる

デルタ関数のフーリエ変換

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\cdot e^{-j\omega x}dx$$

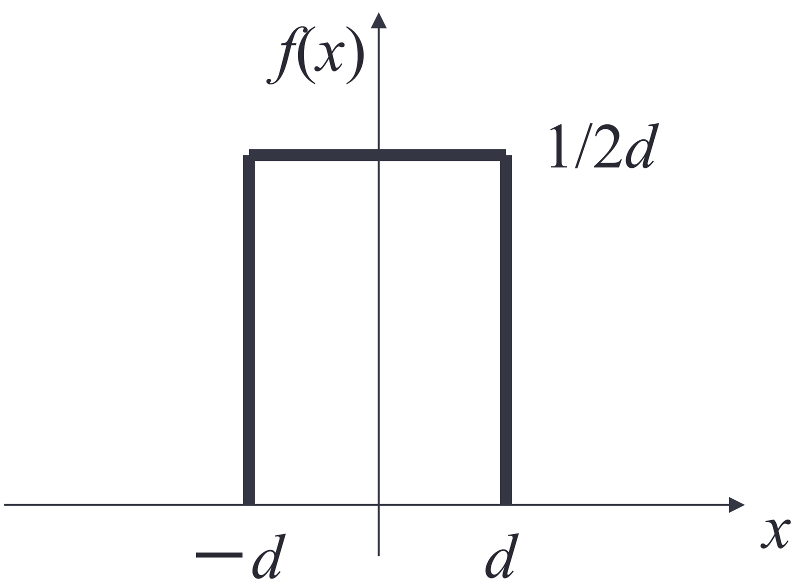


____________________:

常に一定の周波数スペクトル

方形パルスのフーリエ変換

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2d} & (|x|\le d)\\ 0 & (|x|>d)\end{cases}$$



$$\Im[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j\omega x}dx$$

$$=\int_{-d}^{d}\left(\frac{1}{2d}\right)\cdot e^{-j\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} e^{-j\omega x}dx$$

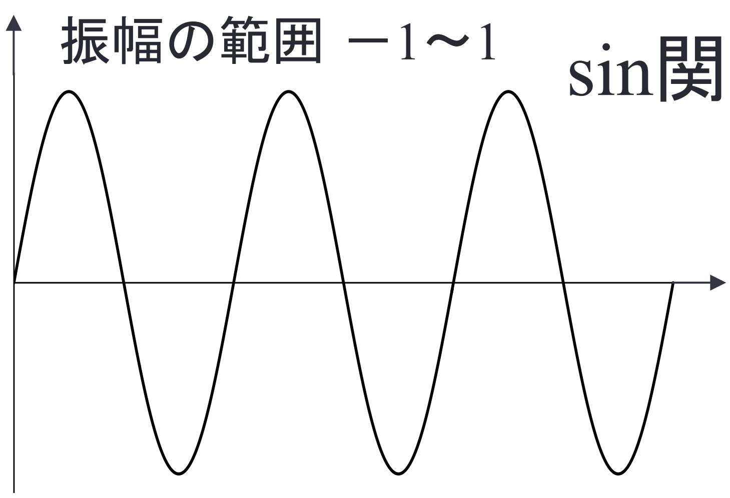
$$=\left(\frac{1}{2d}\right)\left(\frac{1}{-j\omega}\right)\left[e^{-j\omega x}\right]_{-d}^{d}$$

$$=\frac{\qquad}{\qquad}$$

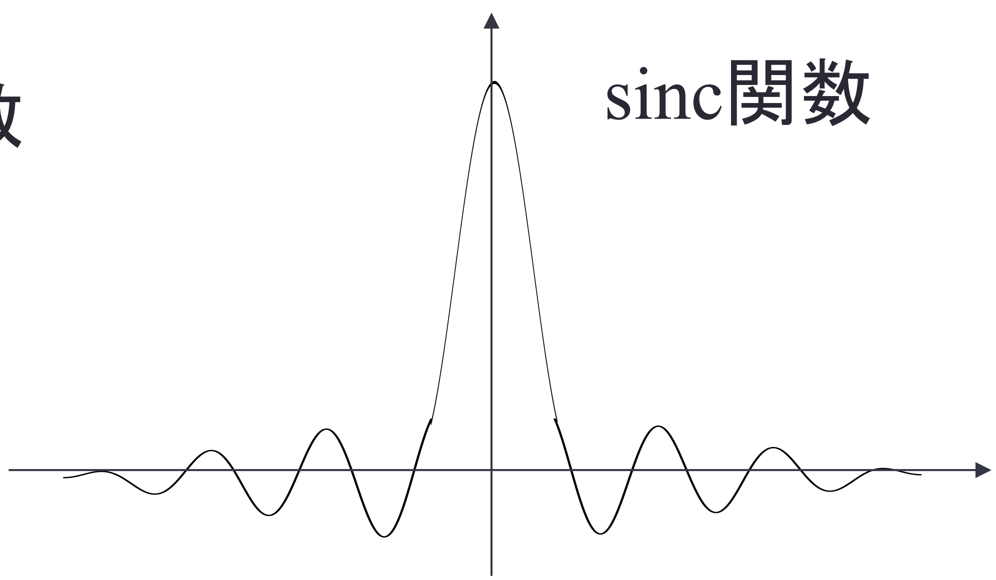
＿＿＿＿＿＿＿関数

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta}, \frac{\sin(ax)}{ax}$$ のように表される関数

$\mathrm{sinc}(\theta)$, $\mathrm{sinc}(ax)$ と表記する



sin関数

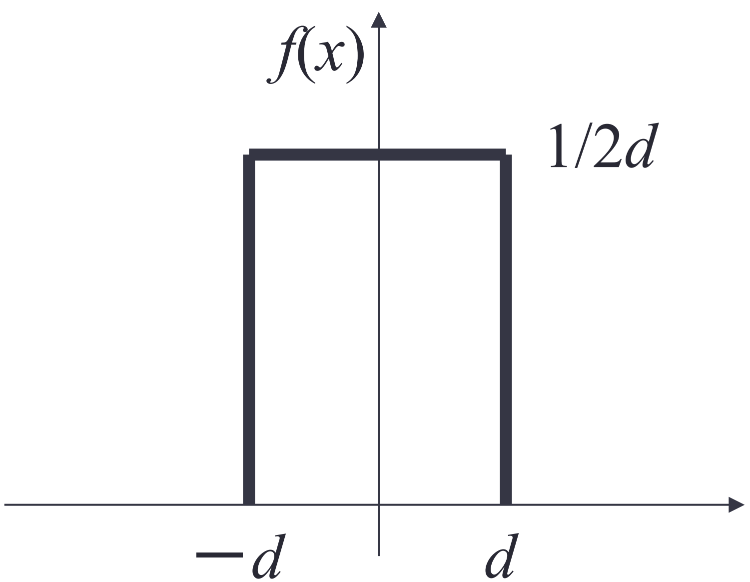


方形パルスのフーリエ変換

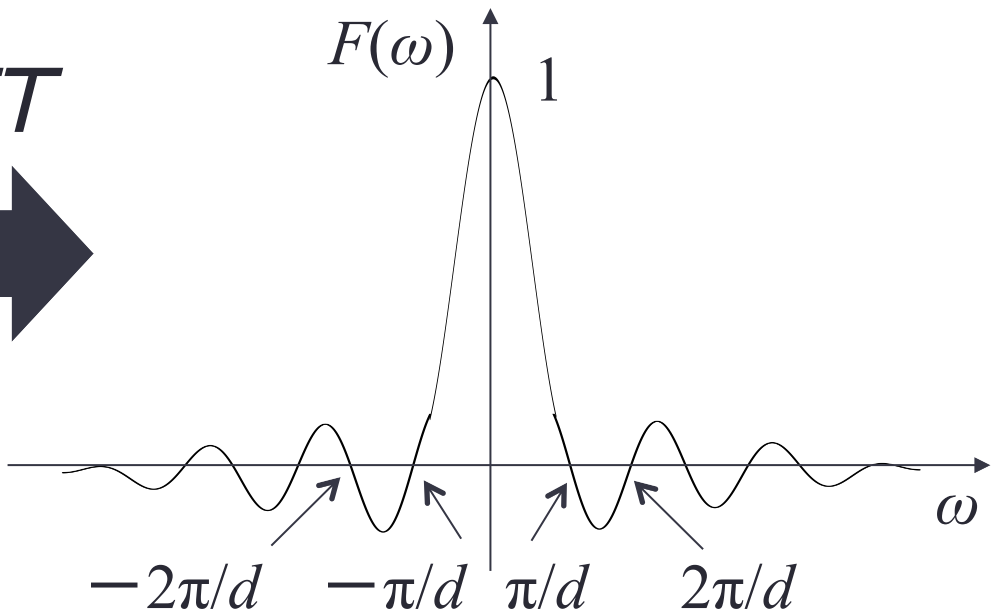
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2d} & \left(|x|\le d\right)\\ 0 & \left(|x|>d\right)\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-d}^{d} f(x)\cdot e^{-j\omega x}dx$$

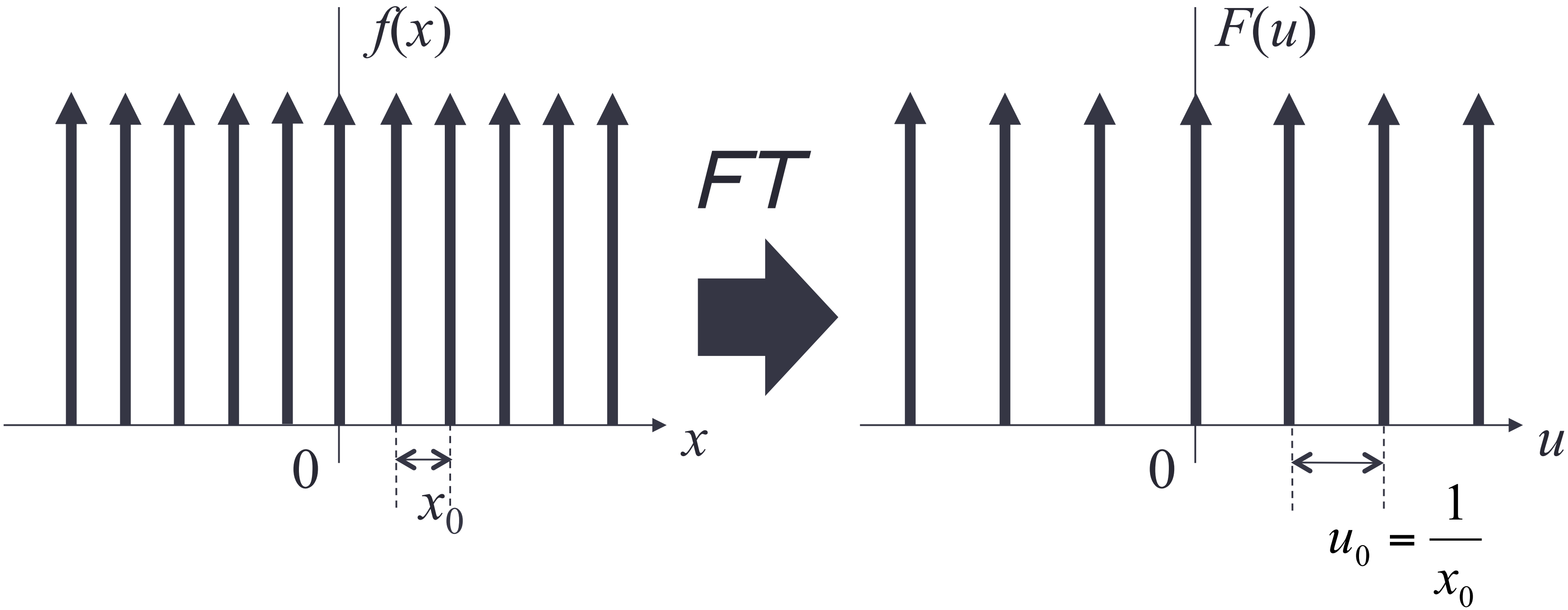
$$= \underline{\qquad\qquad}$$



FT



デルタ関数列のフーリエ変換



comb function,
コム関数，櫛関数
とも呼ばれる

x_0 大 → u_0 小
x_0 小 → u_0 大

「フーリエ変換の応用」まとめ

デルタ関数のフーリエ変換は,
常に1の_______________________________である

方形パルスのフーリエ変換は,
_________________________である

デルタ関数列のフーリエ変換は,
____________________________である

周波数の単位

時間領域 $\xrightarrow{\text{Fourier Transform}}$ 時間周波数領域

t — $cycles/sec,\ Hz$

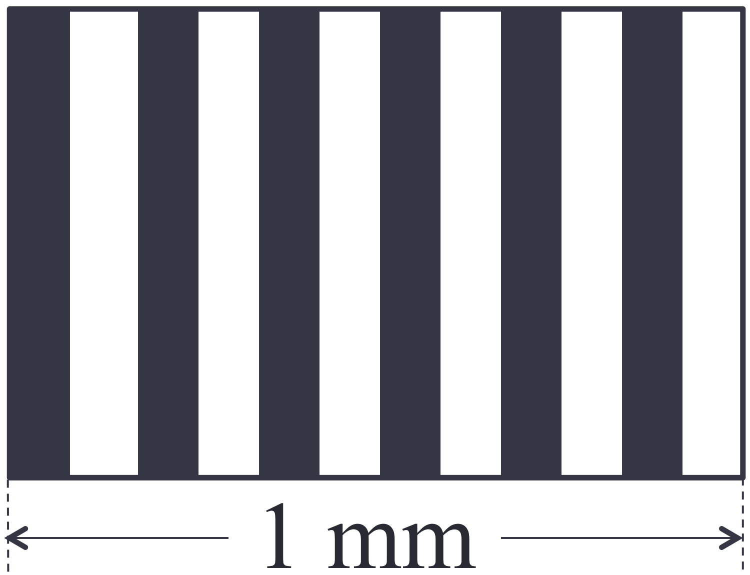
空間領域 $\longrightarrow$ 空間周波数領域

mm — $cycles/mm$

LP/mm

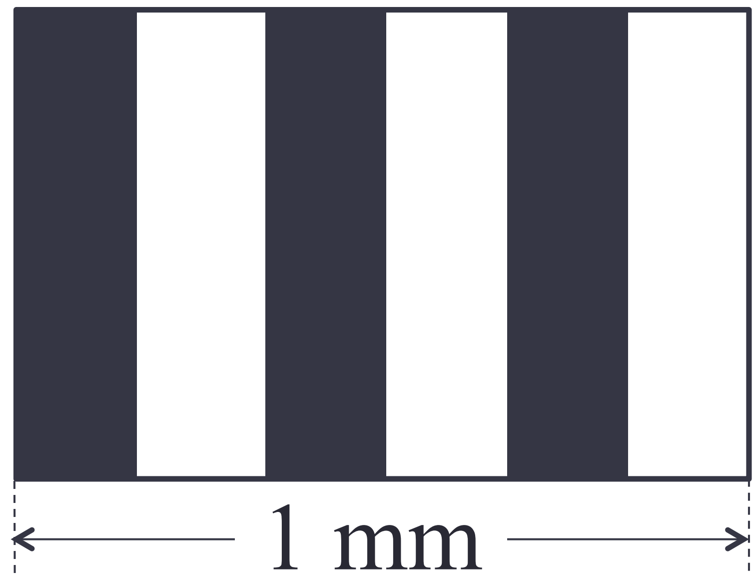
line pairs per millimeter

$$\frac{1}{mm},[mm]^{-1}$$



6 LP/ mm

line間の間隔が
狭い → ________



3 LP/ mm

line間の間隔が
広い → ________