

画像基礎論(数学的手法)

フーリエ解析 (*Fourier Analysis*)

- フーリエ級数, 複素フーリエ級数
- フーリエ変換, 離散フーリエ変換

画像分野でのフーリエ解析

- 撮像システムの周波数応答特性

_____を表すレスポンス関数

粒状性を表す_____

- **デジタル画像処理** における

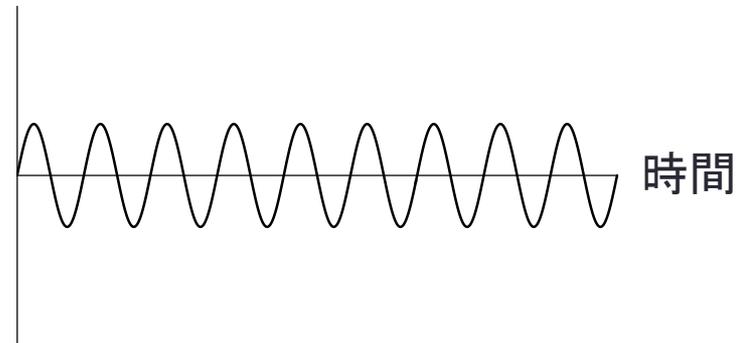
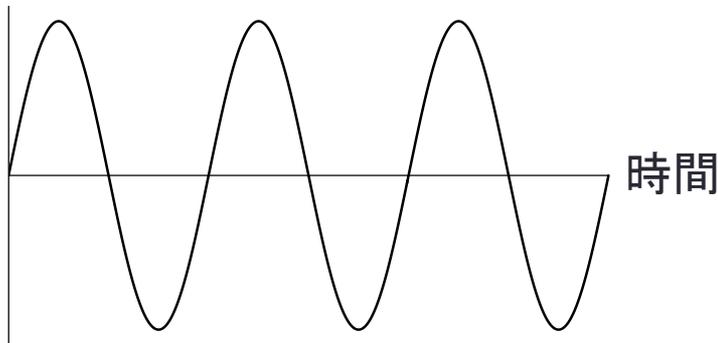
特定周波数成分の強調処理

(時間)周波数

電波や音波などのように時間的に変動する波動に対して使われる周波数

単位:

[単位時間中に存在する波の数]



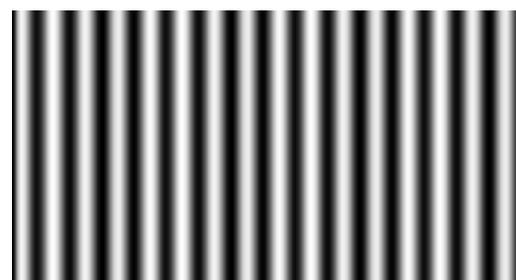
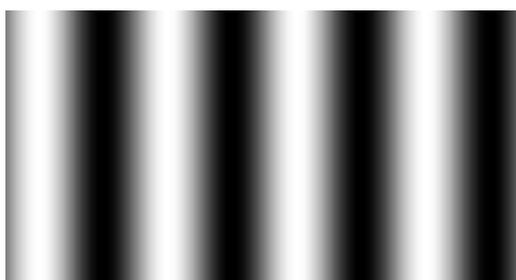
空間周波数

空間的に明暗が変動するような縞模様
の波動に対して使われる周波数

単位:

[単位長中に存在する波の数]

距離

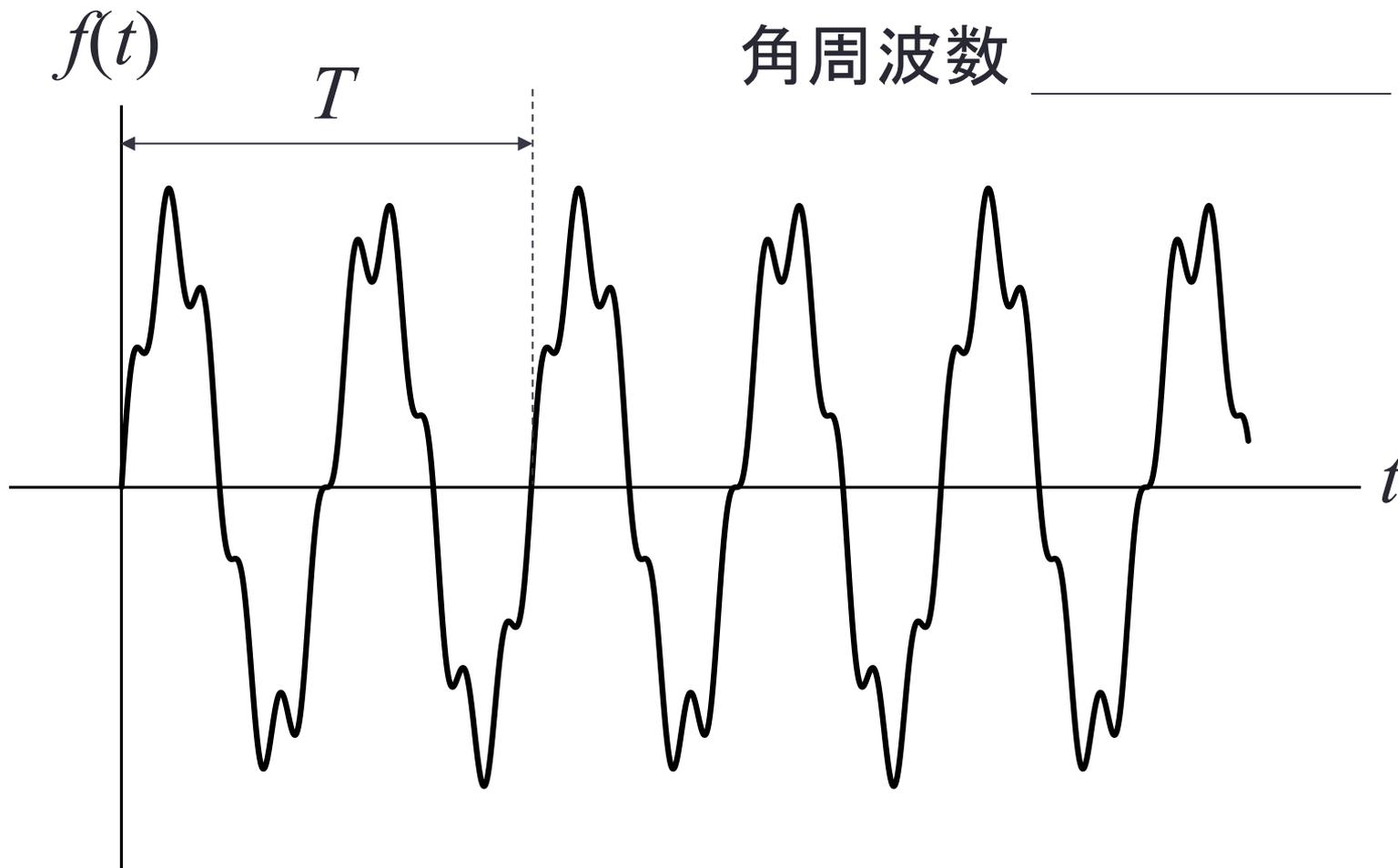


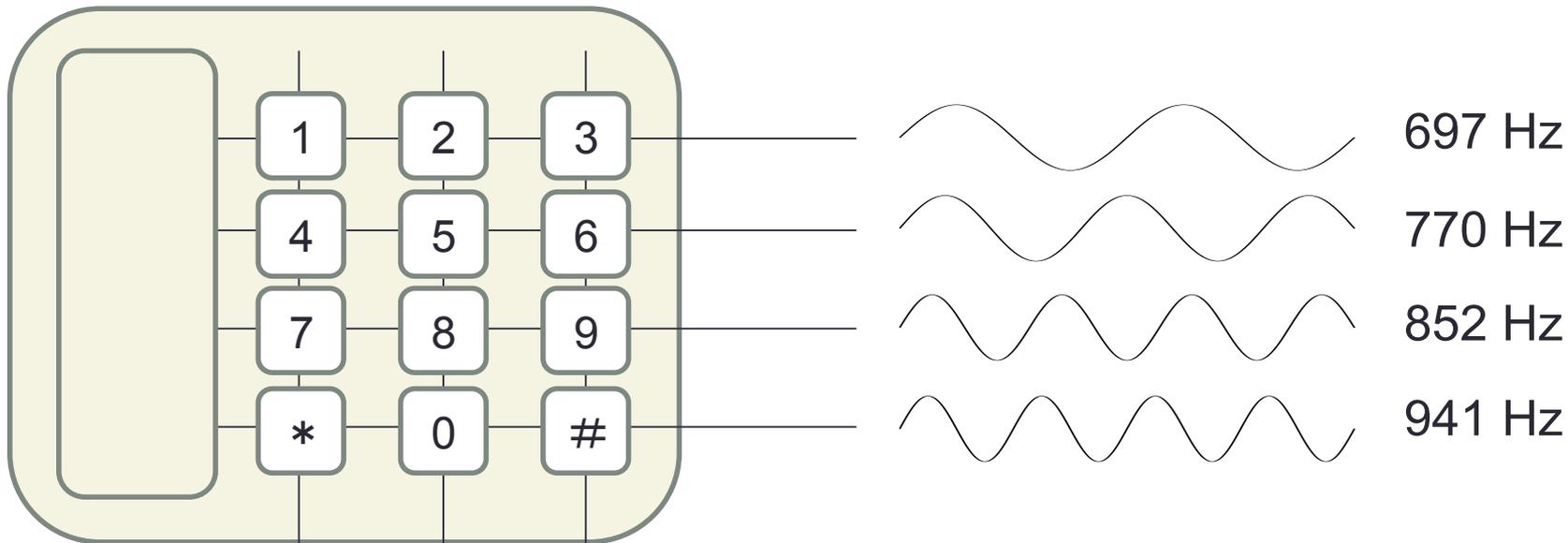
距離

周期関数

周波数 _____

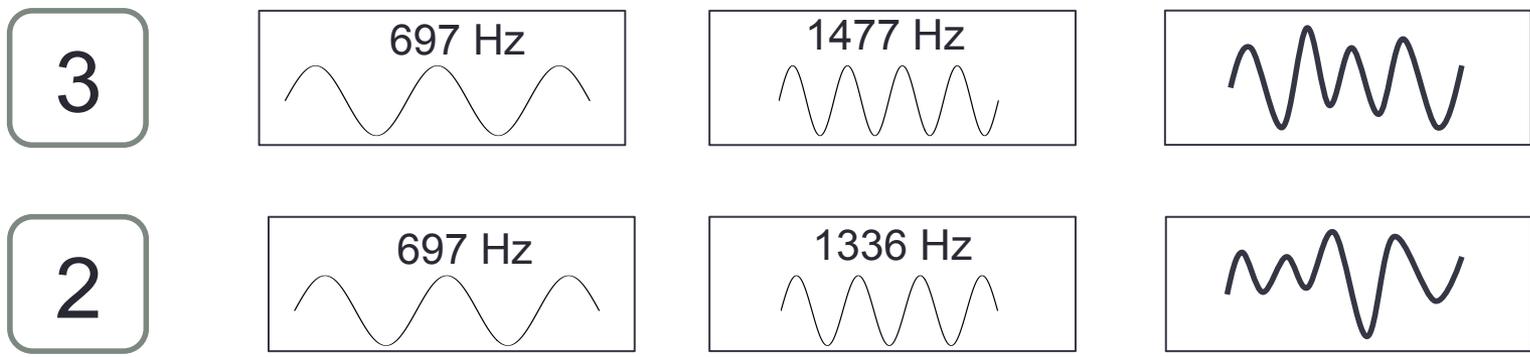
角周波数 _____





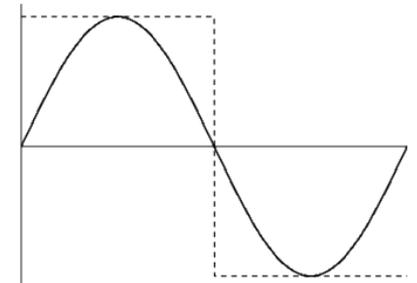
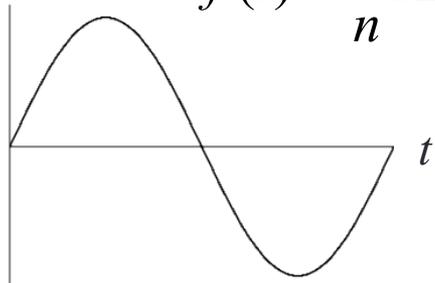
1209 Hz 1336 Hz 1477 Hz

プッシュボタンを押すと、その番号に対応した二つの周波数の信号が送られる



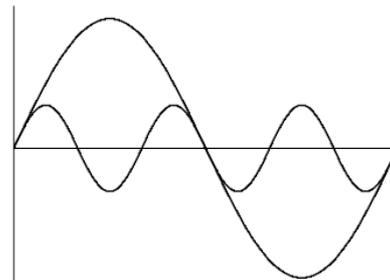
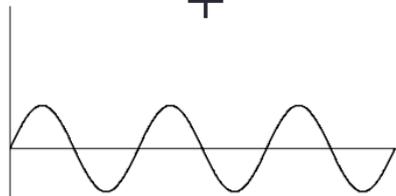
$$f(t) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

$n = 1$

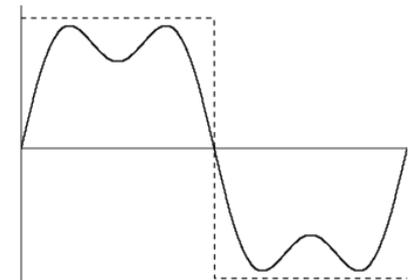


+

$n = 3$

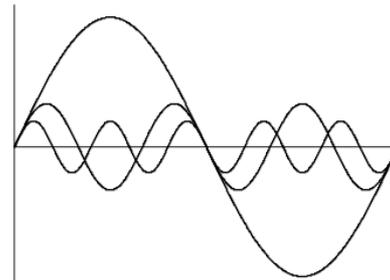
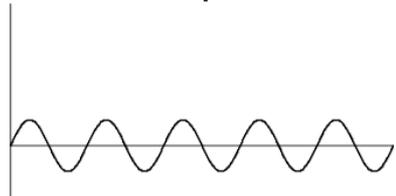


=

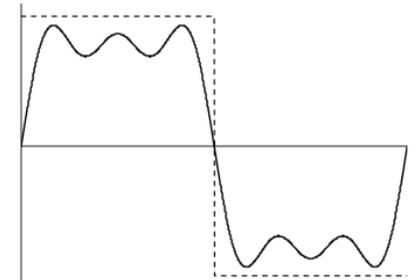


+

$n = 5$

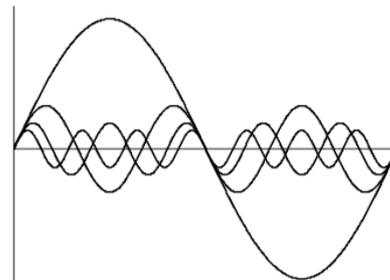
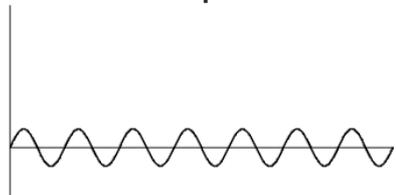


=

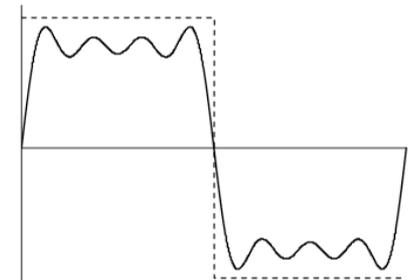


+

$n = 7$



=



フーリエ係数のもつ意味

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

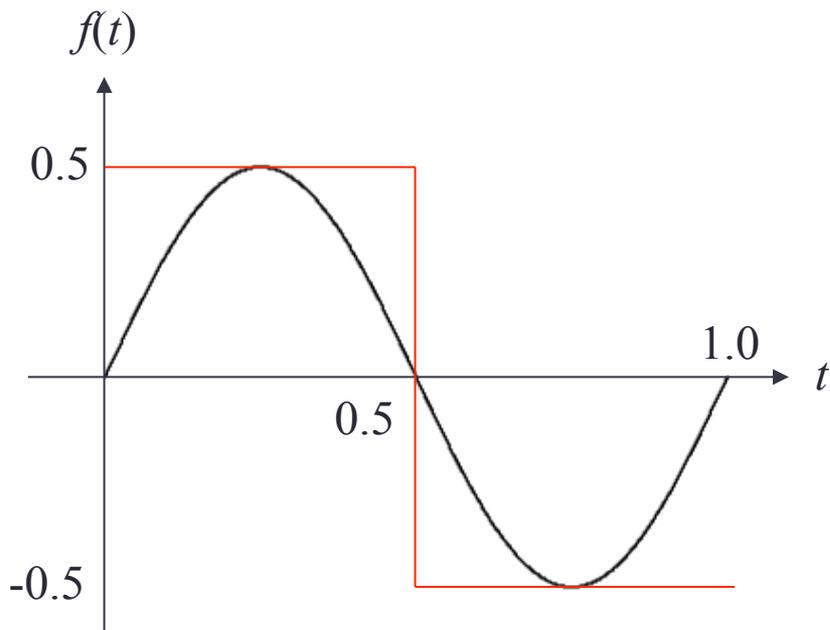
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

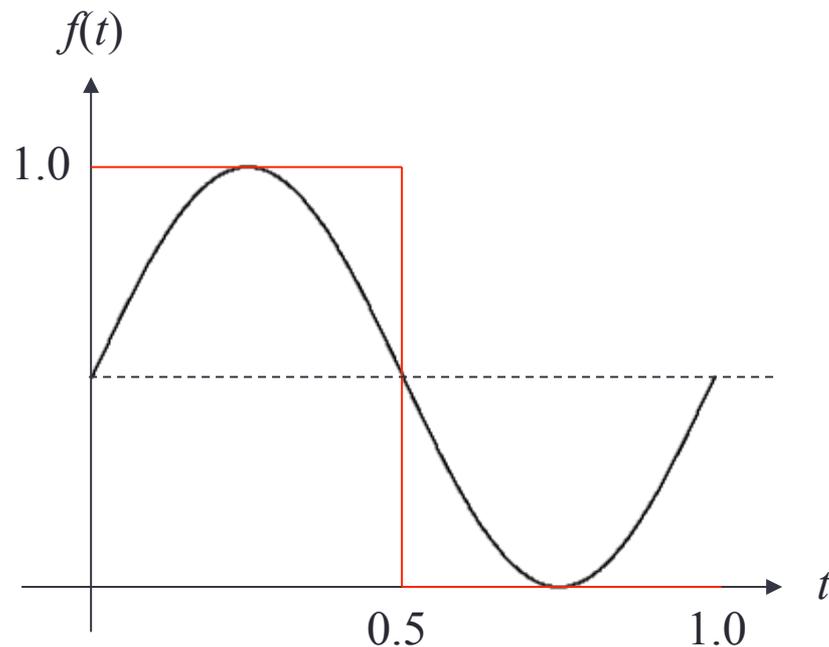
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

直流成分

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

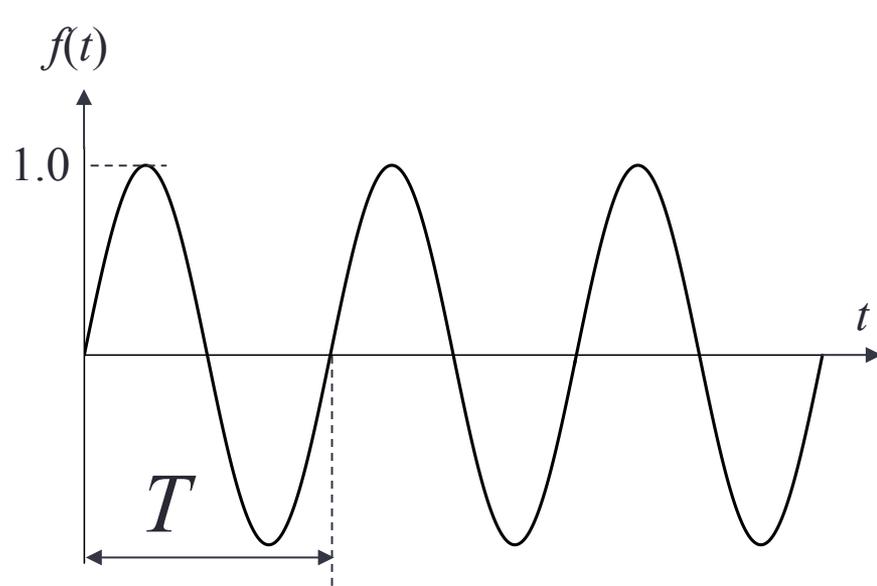


直流成分なし



直流成分が存在する

正弦波のスペクトル

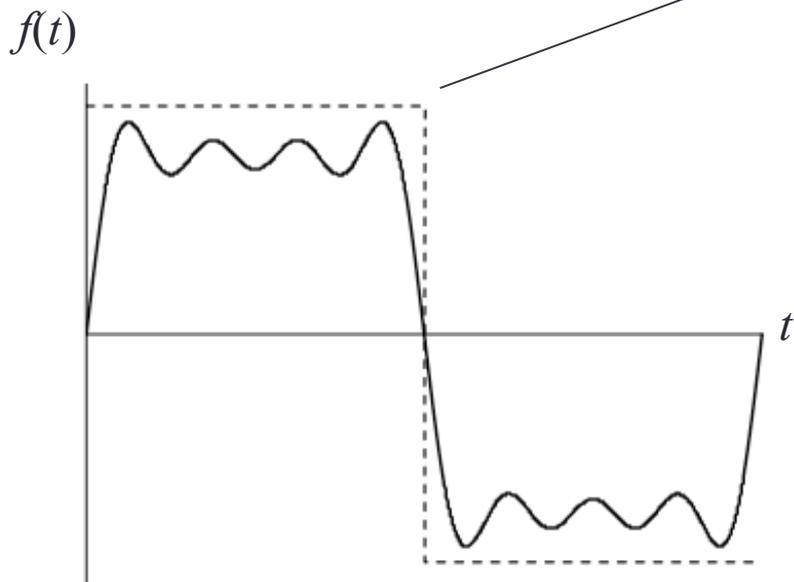


サイン波
[時間領域 (t)]

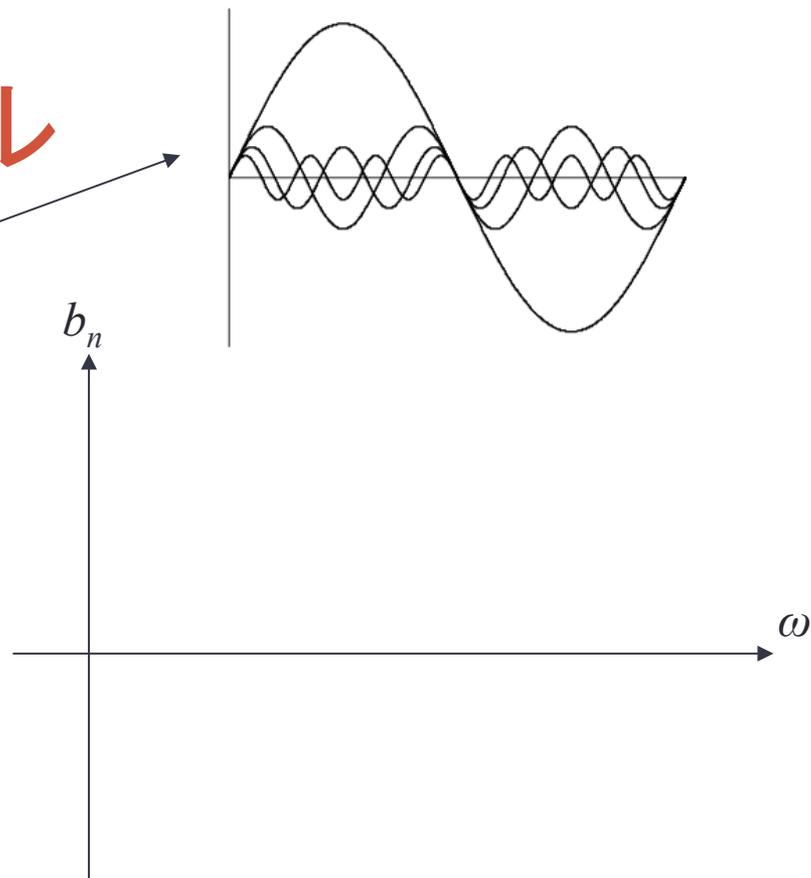


フーリエ係数
[(時間)周波数領域 (ω)]

混合波のスペクトル



4つのサイン波を混
合した波
[時間領域 (t)]



フーリエ係数
[(時間)周波数領域 (ω)]

周期関数は()と()ができる！
→ フーリエ級数

フーリエ級数の前提条件

関数 $x(t)$ は_____でなければならない

_____でも使えるように拡張したい！



オイラーの公式

(複素) 指数関数と三角関数との間の
関係を示す公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$



$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

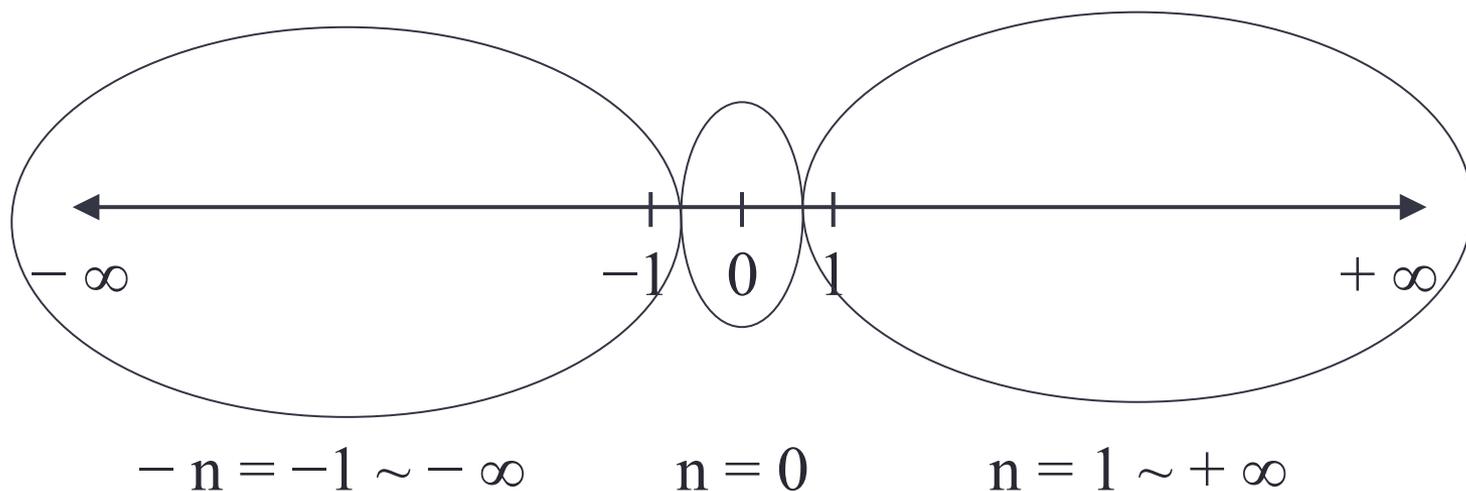
フーリエ級数にオイラーの公式を代入

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\omega t} \right] \end{aligned}$$

複素フーリエ係数

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

複素フーリエ級数

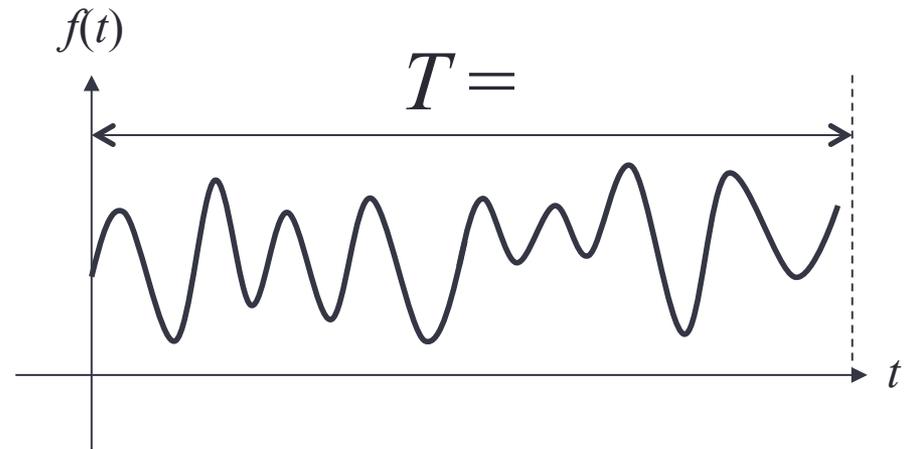


$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

フーリエ級数の限界

非周期関数へ
どう展開するか？



短時間では周期性はないようにみえるが、
長時間でみるとどうか！

フーリエ級数からフーリエ変換へ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (2)$$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ であるので, (2)式から

$$Tc_n = \frac{2\pi}{\omega_0} c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

$\omega = n\omega_0$ とおくと, 上式は ω の関数とみなせるので,

$$Tc_n = F_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

ここで, $T \rightarrow \infty$ ($\omega_0 \rightarrow 0$) の極限をとって $F(\omega)$ とおくと,

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

フーリエ変換



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

フーリエ級数から逆フーリエ変換へ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (2)$$

(1)式から

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_0(\omega)}{T} e^{i\omega t}$$

$\omega_0 = \Delta\omega$ とおくと, $1/T = \Delta\omega/(2\pi)$ となるので,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega$$

逆フーリエ変換

ここで, $\Delta\omega (= \omega_0) \rightarrow 0$, つまり $T \rightarrow \infty$ の極限では

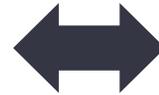
$F_0(\omega) \rightarrow F(\omega)$ で, 右辺は積分形となり,

フーリエ変換

逆フーリエ変換



$$\omega = 2\pi u$$



関数 $F(u)$ を関数 $f(t)$ のフーリエ変換 (Fourier transform: FT) という.
関数 $f(t)$ を関数 $F(u)$ の逆フーリエ変換 (Inverse Fourier transform: IFT) という.
関数 $f(t)$ と関数 $F(u)$ は互いに_____の関係にあるという.

フーリエ変換

与えられた波形を, たくさんの「成分波」に分けて算出する

「成分波」は, いろいろな周期と振幅を持つ
_____と_____である

逆フーリエ変換

いろいろな周期と振幅を持つ「成分波」を足し
合わせれば, _____でも生成できる

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

=

実数部

(*real number*: Re)

虚数部

(*imaginary number*: Im)

$$|F(\omega)| =$$

$|F(\omega)|$: 振幅スペクトル

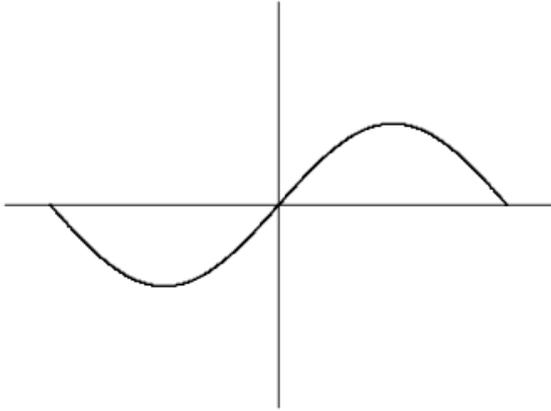
$$|F(\omega)|^2 =$$

$|F(\omega)|^2$: パワースペクトル

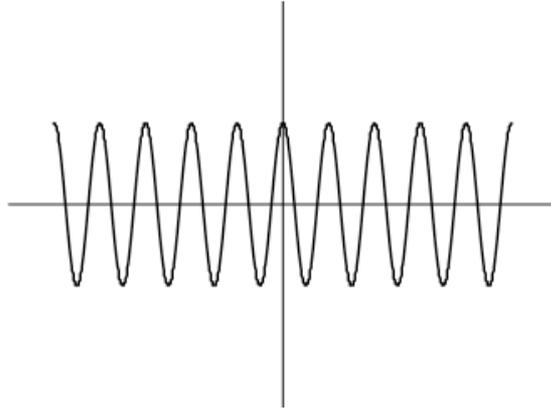
$$\theta(\omega) =$$

$\theta(\omega)$: 位相スペクトル

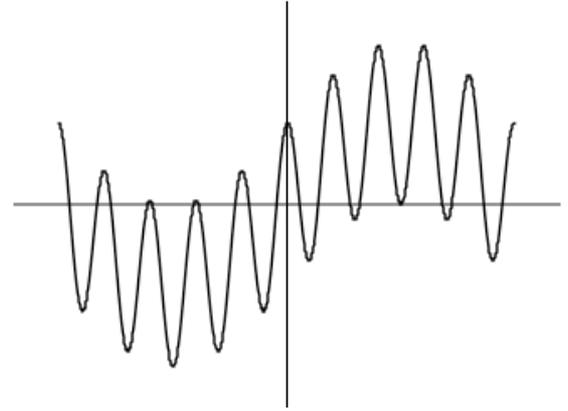
$$f_1(t) = \sin(2\pi t)$$



$$f_2(t) = \cos(20\pi t)$$



$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$$



$$F_{\text{Re}}(u)$$



$$F_{\text{Re}}(u)$$



$$F_{\text{Re}}(u)$$



$$F_{\text{Im}}(u)$$



$$F_{\text{Im}}(u)$$

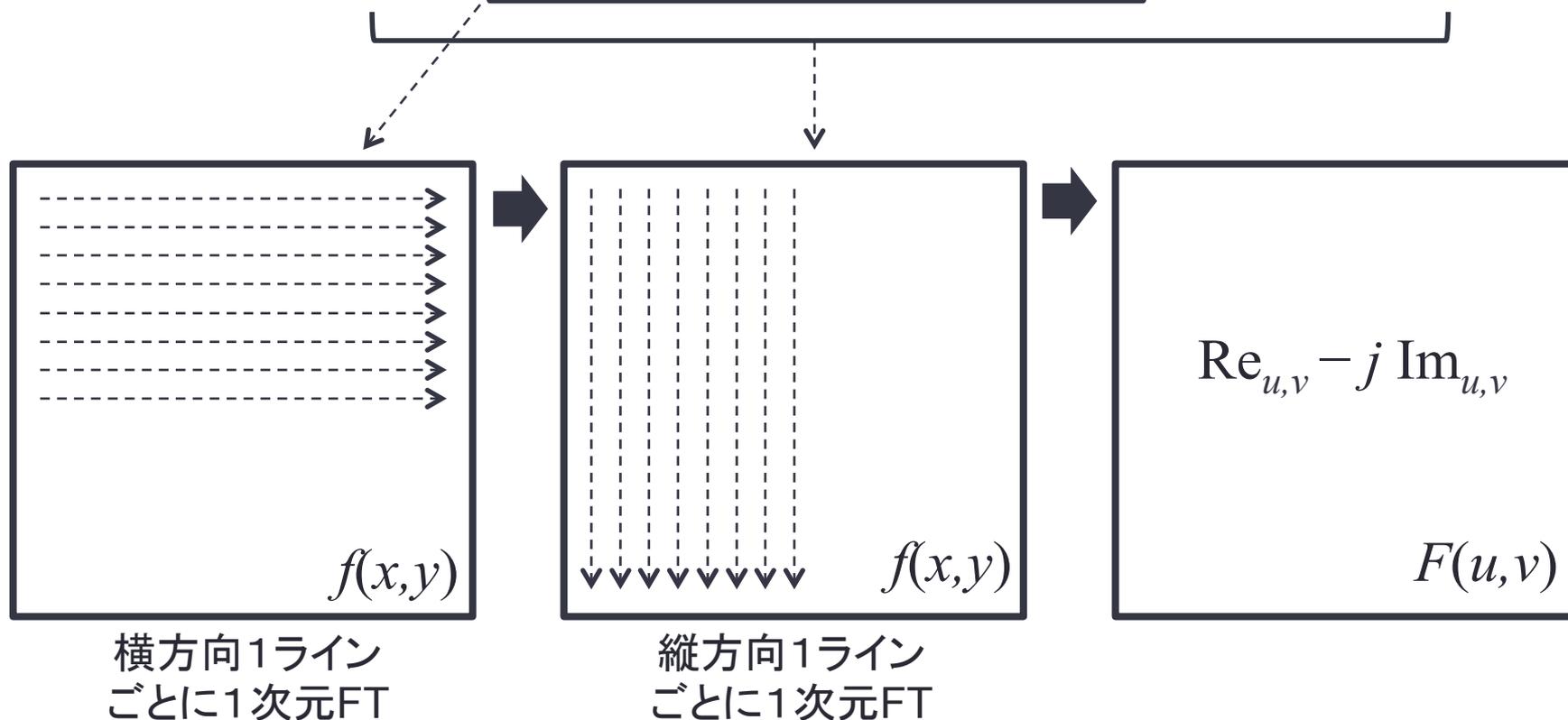


$$F_{\text{Im}}(u)$$



2次元データのフーリエ変換

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx \right] e^{-i2\pi vy} dy$$



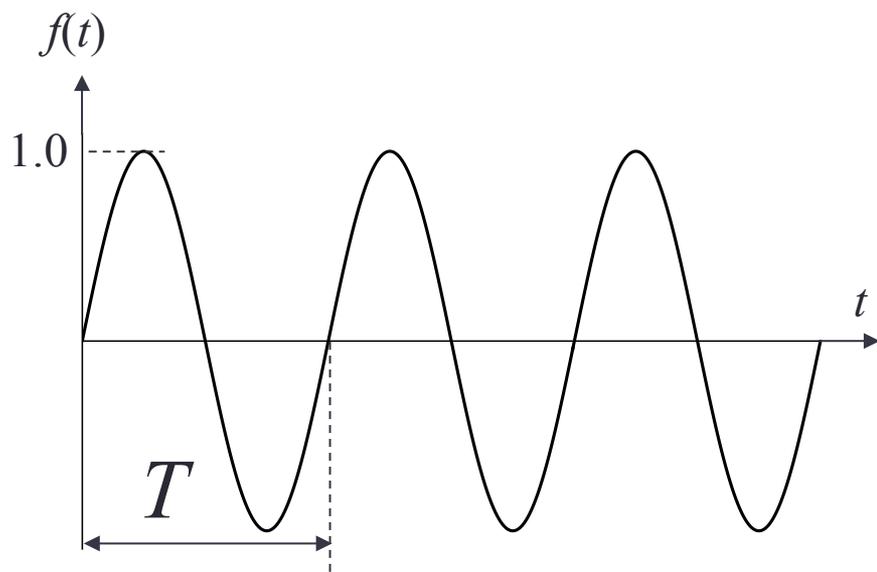
2次元フーリエ変換

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx \right] e^{-i2\pi vy} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \end{aligned}$$

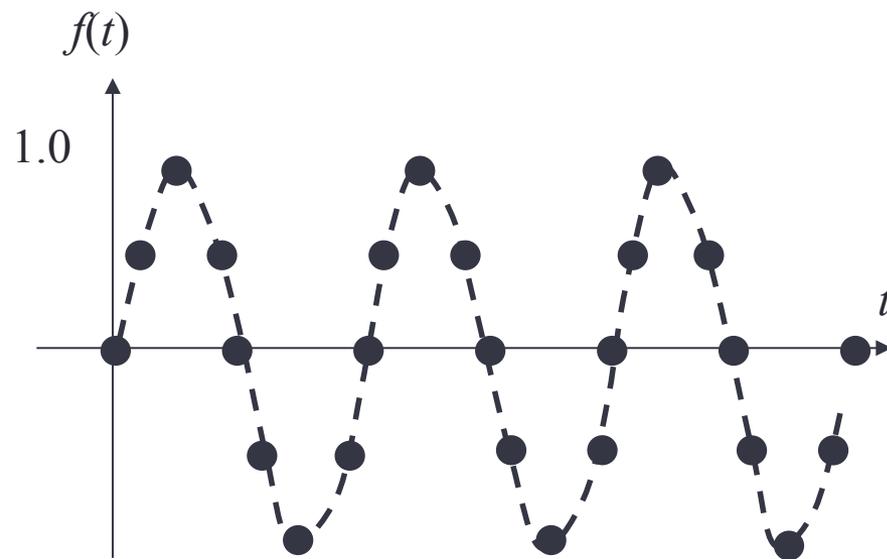
逆変換

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

連続データと離散データ



連続データ
(アナログデータ)



離散データ
(デジタルデータ)

離散フーリエ変換 (Discrete FT: DFT)

正変換

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} && (k = 0, 1, \dots, N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left\{ \cos\left(2\pi\frac{k}{N}n\right) - j \sin\left(2\pi\frac{k}{N}n\right) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(2\pi\frac{k}{N}n\right) - j \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(2\pi\frac{k}{N}n\right) \end{aligned}$$

実数部: Re 虚数部: Im

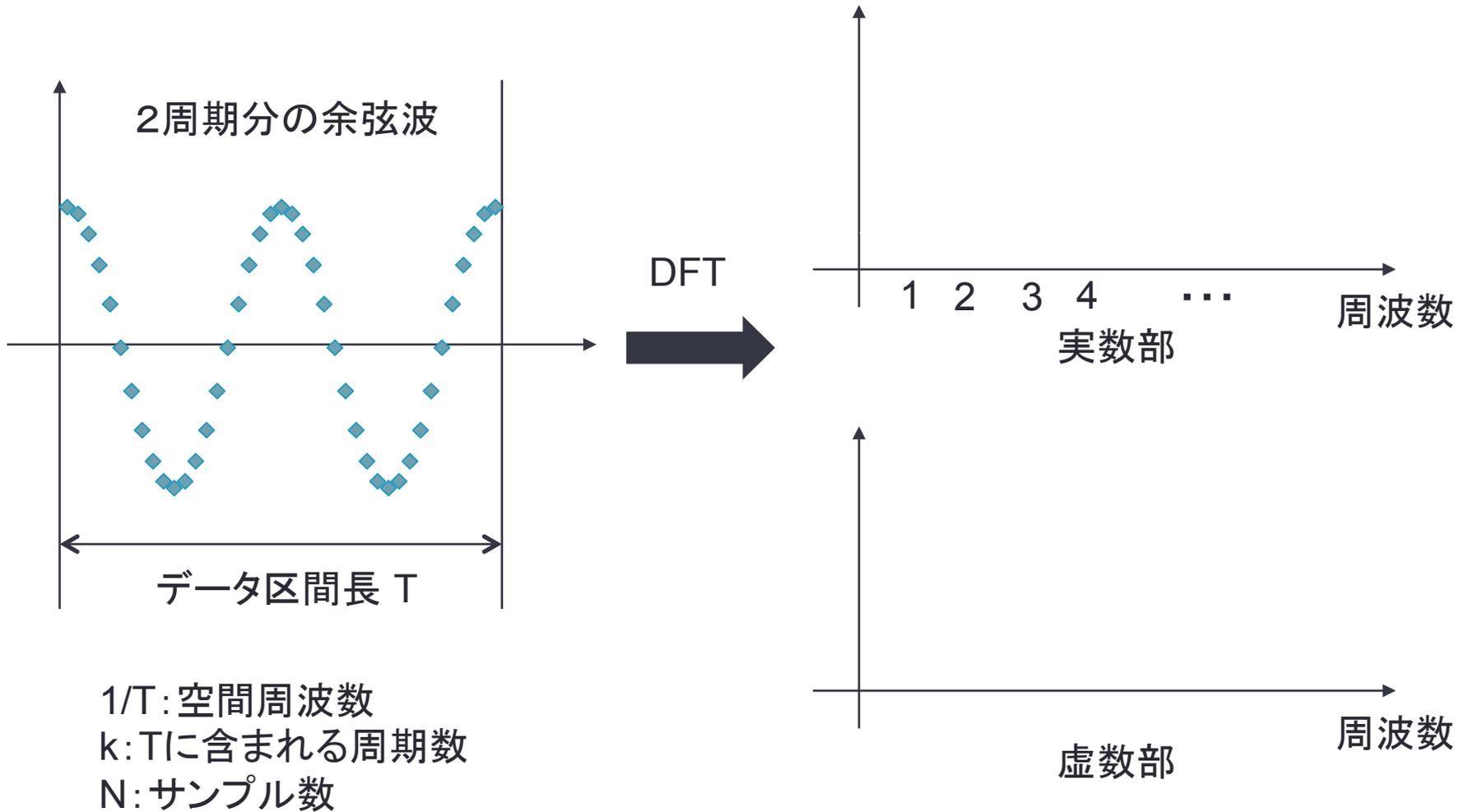
逆変換

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

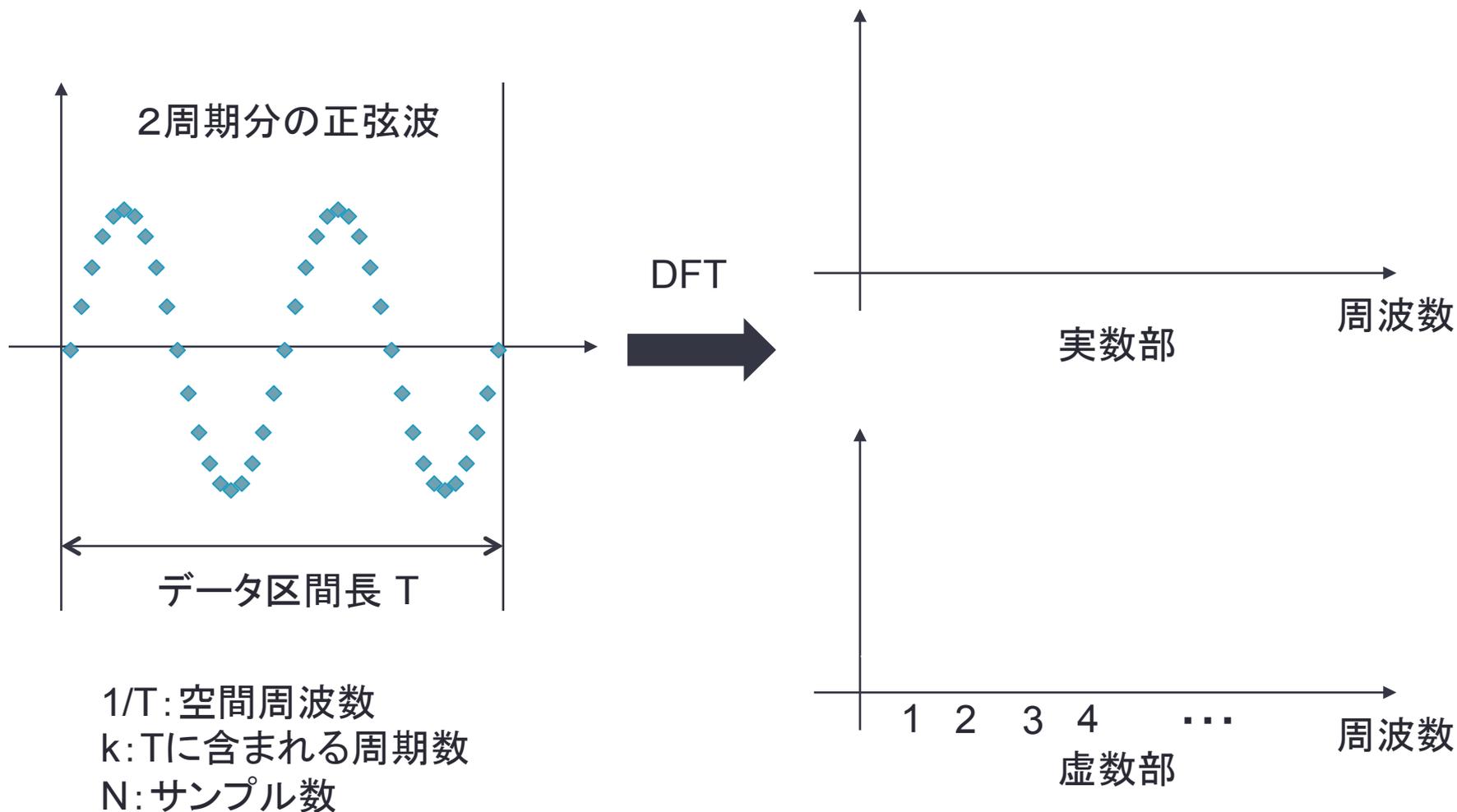
離散フーリエ変換

- どんな波形もいろんな_____と_____を持つ
cos波やsin波で構成(分解)できるという仮定
に基づく
- 変換基底は $\exp^{-j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
- 変換結果は_____ (実部が_____, 虚部が
_____による変換結果)
- _____し, それが
周期的に連続しているものとしてフーリエ変
換を考える

1次元信号のDFT例1

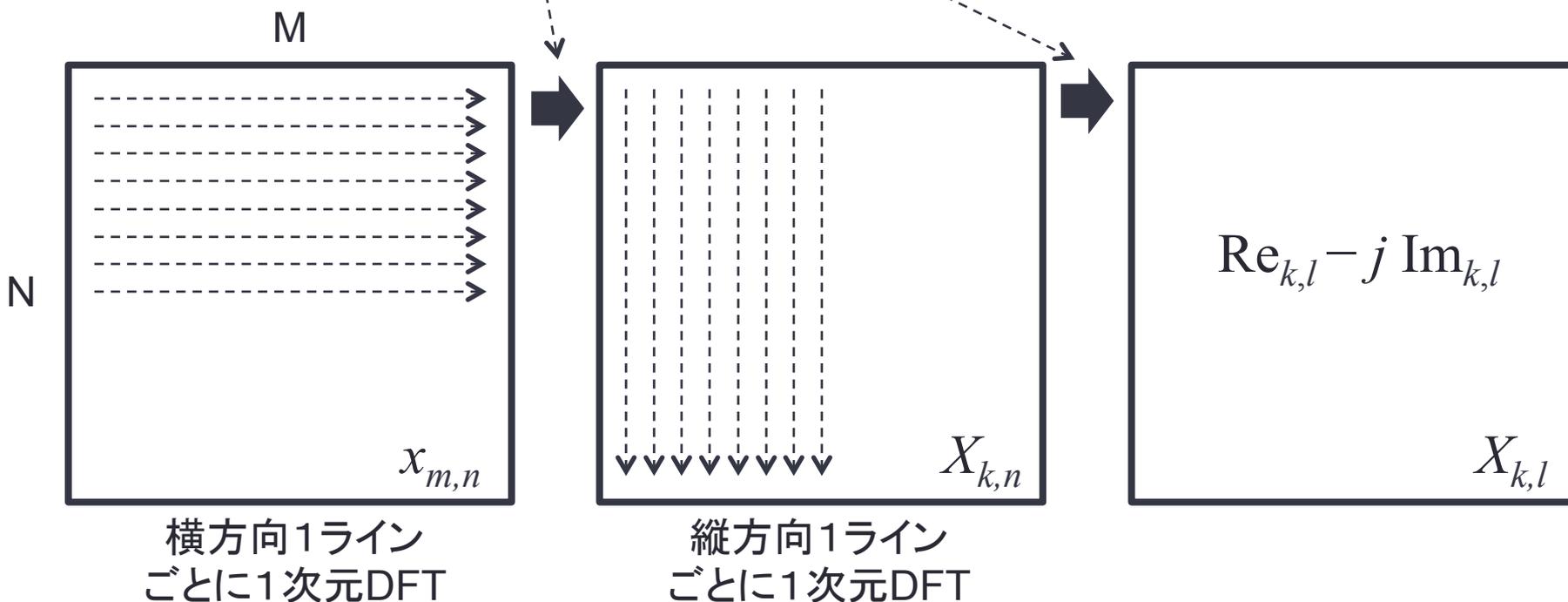


1次元信号のDFT例2



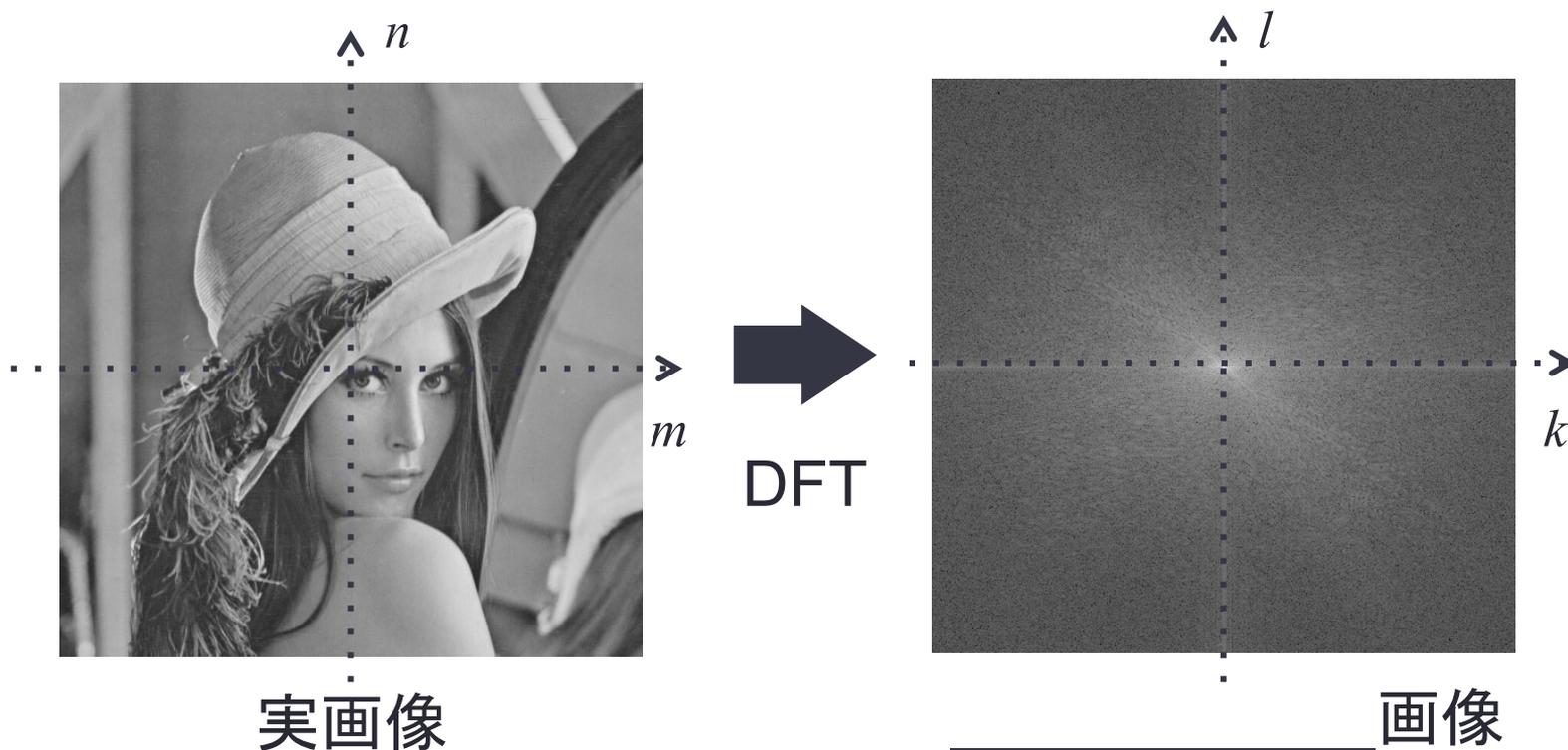
2次元データ(画像)に対するDFT

$$X_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{M-1} x_{m,n} e^{-j2\pi \frac{k}{M} m} \right) e^{-j2\pi \frac{l}{N} n} \quad \begin{array}{l} (k = 0, 1, \dots, M-1) \\ (l = 0, 1, \dots, N-1) \end{array}$$



DFT結果の視覚化

DFTの出力結果として、_____の自然対数値を画像化することが多い



DFT結果の出力

$$|X_{k,l}|^2 = \text{Re}_{k,l}^2 + \text{Im}_{k,l}^2$$

$$|X_{k,l}| = \sqrt{\text{Re}_{k,l}^2 + \text{Im}_{k,l}^2}$$

$$\theta_{k,l} = \tan^{-1} \frac{\text{Im}_{k,l}}{\text{Re}_{k,l}}$$

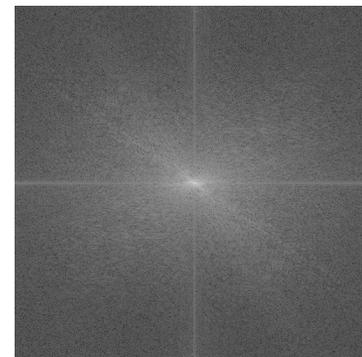
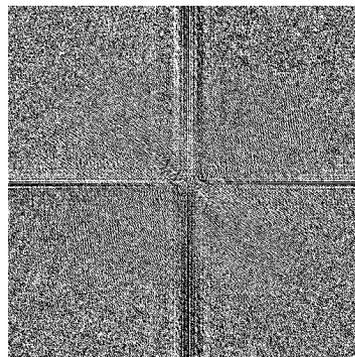
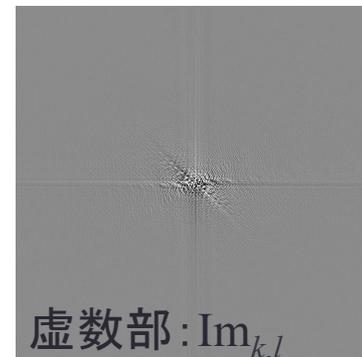
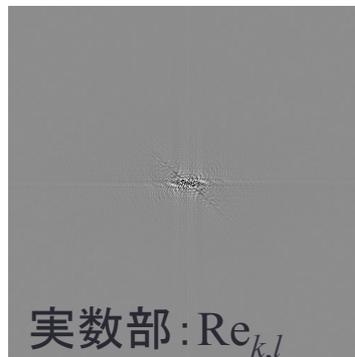
$|X_{k,l}|^2$: _____

$|X_{k,l}|$: _____

$\theta_{k,l}$: _____



原画像: $x_{m,n}$



フーリエ変換

実領域

周波数領域

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ut} dt$$

時間
 $f(t)$

時間周波数
 $F(u)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ut} du$$

空間
 $f(x, y)$

空間周波数
 $F(u, v)$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

逆フーリエ変換

フーリエ変換 (Fourier transform)

- 空間(時間)情報は失われる
- 生体反応データ(脳波, 心電図, 筋電図など)の周波数解析
- 医用画像の形成: CT, MRI
- 検出器／画像の評価: MTF, WS
- 画像処理
 - ローパスフィルタ, ハイパスフィルタ
 - バンドパスフィルタ, バターワースフィルタ
 - ウィナーフィルタ, マルチ周波数処理 etc.